

Matematika: Put ka dubljem razumevanju

Način na koji ćete primeniti metakogniciju u nastavi matematike zavisi od vašeg odnosa prema učenju tog predmeta. Šta za vas znači razumeti matematiku? Kako znate da vaši učenici nešto razumeju? Kakva su vaša očekivanja u vezi s načinima na koje će učenici pokazati to što su razumeli u matematici?

Čini se očiglednim da matematika treba učenicima da bude smislena i da razumevanje treba da bude osnovni cilj nastave matematike. Pitanje o učenju matematike sa smislom ili s razumevanjem tema je koja se poslednjih decenija često pojavljuje među onima koji se bave nastavom matematike; ipak, u praksi često nailazimo na učenje matematike *bez razumevanja*. Evo definicije matematike koju je dao učenik sedmog razreda, a koja je objavljena u publikaciji kanadskog Nacionalnog saveta supervizora za matematiku (*National Council of Supervisors of Mathematics*): *Matiš je pomeranje brojeva po papiru dok se ne dobije odgovor koji očekuje nastavnik* (NCSM 1997, 1–15). Čega se sećate iz vremena kada ste vi učili matematiku? Da li su vas podsticali na razmišljanje o sopstvenom mišljenju ili su čak to od vas tražili? Da li smatrate da je, kao rezultat vašeg iskustva u učenju matematike, matematički način razmišljanja jedna od vaših jačih strana? Sasvim je moguće da je vaš odgovor – ne.

Učenje s razumevanjem

Mnogi se prisećaju učenja matematike kao, uopšte uzev, neprijatnog iskustva – nečeg dosadnog, teškog, što ih je često zbunjivalo. Sećaju se da su zadatke radili sami, ispisujući stranice i stranice iste vrste aritmetičkih vežbi, da su morali da pamte naizgled beskrajne i nepovezane činjenice, postupke, definicije i formule i da su se osećali prilično neprijatno kada su nailazili na originalan ili težak zadatak.

Sada razmislite o svojim učenicima. Da li ste imali učenike koji su lako pamtili činjenice i postupke, ali su bili nervozni i nesrećni kada bi se suočili s problemima naizgled drugačijim od onih na koje su navikli? Da li neki od vaših učenika umeju da nađu zajedničke imenitelje kako bi sabrali dva razlomka kao što su $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{8}$, ali ne mogu jednostavnim posmatranjem da odrede da će zbir ta dva razlomka biti nešto manji od dva?

Mit o tome da učenici uče tako što pamte ono što im se govori i dalje prožima nastavu matematike. Sve dok se učenje matematike posmatra kao ovladavanje nizom osnovnih veština, metakognicija će imati malu ulogu u nastavi matematike, a razumevanje matematike i dalje će biti nedostižno velikom broju učenika. Sve više nastavnika i drugih stručnjaka, međutim, počinje da uviđa značaj metakognitivne aktivnosti, kao i da razvija načine njenog podsticanja. Trebalo bi da osnovno načelo nastave matematike bude pružanje pomoći deci da razumeju sopstveni način razmišljanja i da ga jasno iskažu drugima.

U poslednje vreme u svetu je znatno izmenjeno očekivanje koje društvo ima od nastave matematike, što je uzrokovalo i zalaganje stručnjaka i nastavnika matematike za nove principe u nastavi iz te oblasti. Sve brže promene u našem društvu zahtevaju da učenici nauče kako se uči, da bolje razumeju svet oko sebe i da imaju samopouzdanje koje je potrebno da se to postigne. Većina bi se složila s tim da potreba za stvarnim razumevanjem i sposobnošću primene matematike u svakodnevnom životu i na radnom mestu nikada nije bila veća. Reformski napor u nastavi matematike usredsređeni su na razumevanje. Takođe, postoji i snažno uverenje da razvijanje „dubokog“, konceptualnog razumevanja i navike razmišljanja – što su obeležja metakognicije – prožima sveukupno učenje matematike. To uverenje ne znači da treba zanemariti učenje matematičkih postupaka. Zapravo, da bismo mogli da se setimo pojedinih postupaka onda kada su nam potrebni i da bismo mogli da ih primenimo prilagođavajući ih rešavanju novih problema, moramo ih naučiti s razumevanjem.

Savladavanje neke veštine na metakognitivan način predstavlja idealan put za razvijanje razumevanja. U *Principima i standardima za matematiku u osnovnoj školi* (*Principles and Standards for School Mathematics*), reformskom dokumentu kanadskog Nacionalnog saveta nastavnika matematike (NTCM), razmišljanje i komunikacija označeni su kao međusobno isprepleteni procesi od suštinske važnosti za učenje matematike.

Refleksivno mišljenje odvija se kada svesno mislimo o nekom iskustvu. Pažljivo formulisana pitanja koja postavljaju nastavnici ili drugovi iz odeljenja mogu podstaći učenike na to da razmišljaju o svom mišljenju. Na primer, pitanja poput onih navedenih u *Profesionalnim standardima za nastavu matematike* (*Professional Standards for Teaching Mathematics*) pomažu učenicima da shvate smisao matematike radeći zajedno:

- Da li bi neko od vas odgovorio na isti način, ali bi odgovor drugačije obrazložio?
- Možeš li da dokažeš da to ima smisla?

Sledeća pitanja podstiču učenike na to da se više oslone na sebe kada određuju da li je nešto matematički tačno, a manje na nastavnika kao jedini autoritet:

- Zašto tako misliš?
- Zašto je to istina?
- Da li to ima smisla?
- Možeš li to da predstaviš slikom ili uz pomoć nekog drugog materijala?
- Kako si zaključio da je tvoj odgovor tačan?

Sledeća pitanja pomažu učenicima da nauče da misle matematički:

- Da li se to uvek može primeniti?
- Možeš li da smisliš neki suprotan primer?
- Kako to možeš da dokažeš?

Ovakva pitanja podstiču učenike na to da prave pretpostavke i rešavaju probleme (NCTM 1991, 3–4):

- Šta bi se dogodilo kada bi...?
- Uočavaš li zakonitost?
- Možeš li da predvidiš sledeći korak? Šta si uradio u prethodnom koraku?
- Kakve sve sličnosti i razlike postoje između tvog načina rešavanja zadatka i načina na koji ga je rešila tvoja drugarica?

Refleksivno misliti znači razmatrati ideje, prilaziti problemima s različitih tačaka gledišta, udaljavati se da bi se sve još jednom razmotrilo i svesno razmišljati o onome što se radi, kao i zbog čega se to radi.

Komunikacija, koja obuhvata razgovor, slušanje, pisanje, pokazivanje, posmatranje i drugo, predstavlja saopštavanje sopstvenih misli drugima, slušanje tuđih ideja, ali i komunikaciju sa samim sobom. Komunikacija nam pruža mogućnost da međusobno preispitujemo ideje i da tražimo razjašnjenje i dalja objašnjenja, što nas sve podstiče na to da o sopstvenim idejama dublje razmišljamo.

Razmatranje promene programa u nastavi matematike

Savremeni programi matematike zasnivaju se na ishodima i imaju jasno navedene standarde za sve procese [u Kanadi su ti standardi predstavljeni u *Principima i standardima za matematiku u osnovnoj školi (Principles and Standards for School Mathematics)*]. Ti međusobno povezani standardi odnose se na rešavanje problema, rasuđivanje, komunikaciju, povezivanje i predstavljanje, a služe da se njima rasvetle načini sticanja i primenjivanja znanja. Oni takođe očigledno obezbeđuju metakognitivnu dimenziju potrebnu za razvijanje dubokog matematičkog razumevanja.

Rešavanje problema

Pre dve decenije Nacionalni savet nastavnika matematike Kanade predložio je u *Akcionom planu (Agenda for Action)* da u nastavi matematike težište bude na rešavanju problema. Namera je bila da nastavnici prihvate rešavanje problema i mišljenje koje je za to potrebno kao glavni pristup u nastavi i učenju matematike. Taj cilj je podrazumevao da oni koji uspešno rešavaju probleme primenjuju metakognitivan pristup budući da stalno prate ili sami procenjuju svoj napredak, a svoje postupke stalno prilagođavaju onome što rade. Opis procesa rešavanja problema (razumevanje, planiranje, sprovođenje plana i pogled unazad) koji je dao Džordž Polja (George Polya) 1957. godine često je preporučivan kao model za podučavanje. Te četiri faze služile su kao okvir za određivanje različitih heurističkih procesa koji mogu dovesti do uspešnog rešavanja problema. Stoga su u nastavi korišćeni postupci kao što su upotreba manipulativnih materijala, crtanje dijagrama, traženje zakonitosti, nabrojanje svih mogućnosti, pronalaženje izuzetaka, osvrtnje na urađeno i proveravanje, pojednostavljivanje problema i tome slično.

Nažalost, u obrascu *poduči, pa reši*, koji još uvek preovlađuje u našoj kulturi, svrha takvog pristupa prečesto je bila pogrešno tumačena. Umesto da se rešavanjem problema razvije navika refleksivnog mišljenja, koje bi trebalo da prožme sveukupno učenje matematike, rešavanje problema često se izdvaja i postaje omrznuti deo nastave matematike.

U savremenim programima nastave matematike, međutim, insistira se na tome da je rešavanje problema neodvojiv deo *sveukupnog* učenja matematike. Takav stav mnogo je više metakognitivan. Na primer, kao što se navodi u *Protokolu za zapadnu Kanadu i programu nastave u Alberti* (1996):

Rešavanje problema treba primeniti u sveukupnom programu matematike i treba ga uklopiti u sve oblasti.

Rešavanje problema učenicima pruža mogućnost da aktivno učestvuju u izgradnji matematičkih pojmova, da se upoznaju s raznim postupcima za rešavanje problema, da uvežbavaju upotrebu različitih pojmova i veština na smislen način, kao i da razmenjuju matematičke ideje (str. 8).

Drugim rečima, rešavanje problema nije samo cilj nastave matematike već i najbolje sredstvo za učenje matematike. Rešavanje problema usmerava pažnju

učenika na same ideje i smisao zadatka. Kada nastavnici učenicima zadaju pažljivo odabrane problemske zadatke koji zahtevaju razmišljanje, oni mogu da počnu s matematičkim pojmovima koji su deci poznati i koji će im pomoći da formiraju nove. Onda kada je rešavanje problema sastavni deo školskog programa, deca vežbanjem matematike uče i njenu suštinu.

Učenje matematike putem rešavanja problema i strukturiranja lekcija tako da se deca podstaknu na razmišljanje ne znači da se odbacuju ili zanemaruju osnovne veštine ili računski postupci. Zapravo se, kako to istraživanja sve više pokazuju, većina važnih matematičkih pojmova, postupaka i veština, ako ne i svi, najdelotvornije predočava baš putem rešavanja problema. Na primer, najbolji način na koji deca stiču istinsko razumevanje značenja računskih operacija jeste rešavanje tekstualnih zadataka. Jasna razlika između sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja može se načiniti samo u kontekstu smislenih situacija. U protivnom, pojmovno razumevanje tih operacija ostaje površinsko, jednodimenzionalno i nepotpuno.

Obratite pažnju na različita tumačenja sledećih jednostavnih situacija. Sve one mogu biti predstavljene operacijom oduzimanja.

- Megan je imala 17 dolara u kasici, ali je izvadila deset dolara da bi učestvovala u kupovini rođendanskog poklona za oca. Koliko je još novca ostalo u Meganinoj kasici? (oduzimanje: $17 - 10 = 7$)
- Četvoro ljudi izabralo je čokoladno mleko za ručak, a sedmero sok. Koliko je više onih koji su izabrali sok nego onih koji su se odlučili za mleko? (upoređivanje dva broja ili korespondencija *jedan prema jedan*: $7 - 4 = 3$)
- Ako se rukom prekrije polovina domine, videće se samo četiri tačke. Na domini je ukupno deset tačaka. Koliko je tačaka na domini pokriveno? (pronalaženje nepoznatog sabirka: $4 + _ = 10$ ili $10 - 4 = 6$)

Tekstualni zadaci pružaju mogućnost da se istraže različita moguća značenja svake računске operacije. Ako im se priđe istraživački, oni omogućuju deci da koriste sopstvene metode rada i da za svoja rešenja dobiju potvrdu.

Rešavanje problemskih zadataka obezbeđuje postojan metakognitivan kontekst za učenje i primenu matematike. On pruža priliku nastavniku da u učionici stvori atmosferu koja je podsticajna i koja potpomaže rešavanje problema, a u kojoj učenici, i mlađi i stariji, uče da je *proces* rešavanja problema važan koliko i sama rešenja. Nastava koja se zasniva na rešavanju problemskih zadataka razvija refleksivno mišljenje, neophodno za učenje tokom celog života. Taj pristup takođe pomaže učenicima da razviju sposobnosti razumevanja i primene niza odgovarajućih matematičkih postupaka.

Razmotrite sledeći problem s novčićima.

Na koliko načina možeš dobiti 25 centi ako imaš jedan novčić od četvrt dolara, dva novčića od deset centi, pet novčića od pet centi i 25 novčića od jednog centa?

Ovde je potrebno osnovno znanje o vrednosti četvrt dolara, centa itd., kao i razumevanje operacije sabiranja. Učenici mogu da koriste i prave novčiće da bi pokazali različita rešenja problema. Korišćenjem postupka pokušaja i pogrešaka učenici mogu doći do nekih rešenja koja im na prvi pogled nisu bila očigledna. Ako im zatražite da odrede sve moguće načine, mogu da naprave listu ili tabelu kombinacija novčića (kakva je ovde data) kako bi potvrdili da svaki od njihovih odgovora ispunjava uslov postavljen u problemu i da bi proverili da li su otkrili sve mogućnosti. Učenici mogu da odu i dalje postavljajući i sami slične probleme.

Četvrt dolara	Novčići od deset centi	Novčići od pet centi	Novčići od jednog centa	Ukupno 25 centi
1 (25)	0	0	0	25
0	2 (20)	1 (5)	0	$20 + 5 = 25$
0	2 (20)	0	5	$20 + 5 = 25$
0	1 (10)	3 (15)	0	$10 + 15 = 25$
0	1 (10)	2 (10)	5	$10 + 10 + 5 = 25$
0	1 (10)	1 (5)	10	$10 + 5 + 10 = 25$
0	1 (10)	0	15	$10 + 15 = 25$
0	0	5 (25)	0	25
0	0	4 (20)	5	$20 + 5 = 25$
0	0	3 (15)	10	$15 + 10 = 25$
0	0	2 (10)	15	$10 + 15 = 25$
0	0	1 (5)	20	$5 + 20 = 25$
0	0	0	25	25

Osnovna odgovornost nastavnika jeste u tome da odredi i izabere matematičke probleme koji podstiču metakognitivan pristup nastavi i učenju. Nastavnicima je na raspolaganju veliki izbor takvog materijala. Dobri zadaci pomažu učenicima da razumeju pojmove i veštine na način koji kod njih razvija sposobnost da misle matematički i da postanu samostalni u učenju. Razmotrite sledeća ključna pitanja kada je reč o izboru dobrih zadataka.

- Da li je u rad na zadatku uključeno bavljenje značajnim matematičkim pojmovima i odnosima?
- Da li zadatak podstiče mišljenje višeg nivoa?
- Da li zadatak zahteva od učenika da razmišljaju?
- Da li zadatak ima neku svrhu?
 - Da li zadatak vodi učenika ka razumevanju važnih matematičkih ideja koje su u osnovi rešenja?
 - Da li je zadatak zanimljiv većini učenika?
- Da li zadatak omogućuje različite načine dolaženja do rešenja?
 - Da li postoji više različitih načina rešavanja zadatka? Potrebno je da učenici s različitim sposobnostima, potrebama i iskustvom mogu da se angažuju u pojedinim aspektima zadatka.
 - Da li zadati elementi daju dovoljno instrukcija, a da pri tom bitno ne ograničavaju načine na koje učenici mogu da razmišljaju o zadatku?
- Da li se zadati postupci mogu smatrati sredstvom, a ne nečim obaveznim?
- Da li se od učenika traži da razmišljaju i razgovaraju s drugima o sopstvenom mišljenju i načinu rada?

Rasuđivanje

Kao što pokazuje definicija data u radu *Pružanje podrške poboljšanju nastave matematike (Supporting Improvement in Mathematics Education)*, matematika je nešto više od skupa pojmova, veština i postupaka.

To je istraživanje odnosa (između brojeva, oblika), traganje za zakonitostima i poretkom, pokušaj da se otkrije smisao u svetu. Ova disciplina obuhvata povezivanje, uočavanje zakonitosti, poretka, upotrebu logike, pretpostavljanje, postavljanje hipoteza, njihovo dokazivanje, rešavanje problema (I-14).

Matematika je rasuđivanje. Sposobnost rasuđivanja, objašnjavanja i potvrđivanja sopstvenog razmišljanja veoma je važan deo rešavanja problema, od suštinskog značaja za razumevanje matematike. Bez rasuđivanja, logičkog razmišljanja koje nam pomaže da odredimo da li su i zašto su naši odgovori tačni, matematika je svedena na veštinu bez razmišljanja.

Matematičko rasuđivanje se, međutim, ne može razviti izolovano. Iсуviše mnogo dece smatra da je matematika strog skup pravila kojim upravljaju merila tačnosti, brzine i pamćenja. Kao mala, ta deca su radoznala i uključuju se prirodno u matematičke aktivnosti, razvrstavajući predmete, otkrivajući zakonitosti i stvarajući veze koje se zasnivaju na posmatranju. Malo-pomalo, njihovo viđenje matematike se menja. Oni se kreću od entuzijazma do zebnje i od samouverenosti do straha. Sposobnost rasuđivanja jeste proces koji se mora strpljivo razvijati kroz sve razrede. On izrasta iz mnogih iskustava koja decu dovode do uverenja da matematika ima smisla.

Metakognitivan pristup nastavi i učenju matematike znači da učenike, ako oni treba da nauče da se oslanjaju na sopstveno matematičko rasuđivanje, valja ohrabriti da na različite načine proveravaju svoja rešenja, razmišljanja i pretpostavke. Na primer, oni mogu koristiti fizičke modele, slike, poznate činjenice i osobine. Učenike treba upućivati i na to da sopstvenim rečima objasne na koji način rasuđuju. Kada treba da obrazlože svoje odgovore, učenici počinju da misle o mišljenju.

Potrebno je da svi učenici razviju naviku davanja obrazloženja kao sastavnog dela svakog odgovora. Stalna upotreba usmenih i pismenih naloga poput sledećih podstiče učenike na to da otkriju važnost razmišljanja o mišljenju, kao i da shvate da je obrazloženje odgovora važno bar koliko i sam odgovor.

- Objasni kako si došao do odgovora.
- Objasni svoj rad.
- Kaži zašto tako misliš.
- Kakva veza postoji između ovog zadatka i drugih zadataka koje smo radili?

Komentar Džeja Higinisa (J. Higgins) u radu u časopisu *Nastavnik aritmetike (Arithmetic Teacher)* jasno to predočava: *Mi, nastavnici, dobijamo ono što tražimo. Ako tražimo samo jednostavne numeričke odgovore, deca će voditi računa samo o postupku i računanju. Ali, ako tražimo raspravu, objašnjenje i obrazloženje i ako takve odgovore nagrađujemo, onda će deca voditi računa o razumevanju i smislenosti (1988, 2).*

Važno je primetiti da rasuđivanje ne vodi uvek nužno do tačnih rezultata. Ponekad rasuđivanje, čak i vrlo pažljivo, može biti pogrešno. Ako želimo da matematičko rasuđivanje učinimo stvarnim središtem rada na času matematike, moramo biti spremni na to da ćemo često nailaziti na pogrešno rasuđivanje. Učenici moraju da nauče da su analiziranje i ponovno razmatranje, udublјivanje u teorije i njihovo pažljivo isprobavanje, suočavanje sa sopstvenim pitanjima i pitanjima drugih uobičajeni i moraju da iskuse kako to izgleda kada se razmišlja i rasuđuje pogrešno. Jednako je važno i to što pogrešno rasuđivanje često otkriva važna matematička pitanja o kojima svi učenici treba da razmisle.

Komunikacija

Komunikacija označava, pre svega, sposobnost da se o matematičkim idejama govori i piše, da se one opisuju i objašnjavaju. Ona je neraskidivo povezana s rešavanjem problema i rasuđivanjem, a olakšava metakognitivan pristup učenju matematike. Kako se matematički jezik učenika razvija, tako se razvija i njihova sposobnost da razmišljaju o problemima, da rasuđuju u vezi s njima i da ih rešavaju. Štaviše, rešavanje problema jeste uslov za razvoj i poboljšanje veština komunikacije i sposobnosti rasuđivanja.

Matematika je često mišljenje o simbolima i izražavanje u simbolima. Posledica toga jeste da se ključna umeća komuniciranja, kao što su predstavljanje, govor, slušanje, pisanje i čitanje, ne prepoznaju uvek kao važan deo nastave i učenja matematike. Ipak, nema boljeg načina na koji se možemo uhvatiti u koštac s nekom idejom od pokušaja da je objasnimo drugima. Razmena mišljenja s drugovima iz odeljenja pomaže u građenju znanja, u spoznavanju drugih načina razmišljanja o nekoj ideji i u razjašnjavanju sopstvenog mišljenja. Međutim, pitanja kod kojih je odgovor ograničen na recitovanje jednog jedinog broja, na jednostavno *da* ili *ne* ili na mehanički zapamćen postupak ne uče đake komunikacionim veštinama koje su im potrebne. Takva pitanja ne pružaju ni nastavniku mogućnost da dođe do podataka na osnovu kojih bi mogao doneti odluke u vezi s poboljšanjem nastave. S druge strane, pažljivo smišljena pitanja mogu podstaći učenike na to da ponovo razmisle o svom rasuđivanju i da organizuju i zabeleže sopstvena razmišljanja.

Pisanje u matematici, koje može imati različit oblik, takođe pomaže učenicima da učvrste svoj način razmišljanja. Ono zahteva od njih da razmišljaju o svom radu potpunije i sistematičnije i da razjasne svoja razmišljanja u vezi s pojmovima iz neke lekcije. U sledećem primeru može se videti kako zadatak u kojem je od učenika trećeg razreda zahtevano da analiziraju i pismeno objasne dva različita načina sabiranja pruža dobar uvid u način razmišljanja deteta.

$$\begin{array}{r} 99 \\ 199 \\ + 299 \\ \hline 300 \\ 270 \\ + 27 \\ \hline 597 \end{array}$$

Prvo sam sabrala stotine i desetine sam 300. Onda sam sabrala desetice i desetine sam 27 desetice. Onda sam sabrala jedinice i desetine sam 27. Onda sam sabrala tri desetine i desetine sam 597.

Prvo sam sabrala 2 od 99, pa sam dobila 1 na 99 i 1 na 299. Onda sam tako sabrala pa tri desetine i tako sam dobila 597.

Nijedan od postupaka koje je učenica opisala ne odražava tradicionalni algoritam koji bi većina odraslih povezala sa sabiranjem. Prvo rešenje predstavlja dosta dobro razumevanje mesne vrednosti, naročito u predstavljanju 27 desetica kao 270, što olakšava rad sleva nadesno. Drugo rešenje je konstruktivno, omogućuje detetu da umanji prvi broj za 2 i da onda sledeće brojeve poveća za po 1 i tako obezbedi lakše sabiranje. Oba rešenja su otklonila potrebu za „pregrupisavanjem“ brojeva ili korišćenjem „prelaza preko desetice“, što je najčešća i za učenike ponekad problematična crta tradicionalnih algoritama.

U sledećem primeru učenik pokazuje postupak rešavanja zadatka koji otklanja potrebu za korišćenjem „prelaza preko desetice“ i predstavlja razmišljanje angažovano u tri različita oblika – simboličkom (korišćenjem brojeva), slikovnom (crtanjem elemenata dekadnog sistema) i pismenom (objašnjenjem postupka).

The image shows a student's handwritten work on a grid background. At the top, there are two addition problems. The first is $234 + 199 = 433$, with the numbers written in a way that suggests a strategy of adjusting the second number. The second problem is $233 + 200 = 433$. Below these, there are three rows of symbols: the first row has two squares and four vertical bars; the second row has one square, eight vertical bars, and three groups of three small squares; the third row has two squares, four vertical bars, and two small squares. At the bottom, there is a paragraph of text in Cyrillic explaining the strategy: 'Прво одузмем 1 од 234 и ставим га са 199. Сада је 234 постајо 233, а 199 је 200. То је једнако 433.'

Važno je imati na umu da sposobnosti mišljenja ili rešavanja problema i komunikacione veštine učenika ne moraju uvek biti na istom nivou. Ponekad ono što u početku izgleda kao netačan odgovor može, zapravo, biti nesposobnost da se odgovor dobro objasni.

Naglašavanje objašnjavanja i verbalnog izražavanja na času matematike podstiče metakognitivan pristup nastavi i učenju matematike. To se događa zahvaljujući pomaku od situacije u kojoj učenici potpuno zavise od učitelja ka preuzimanju veće odgovornosti za procenu sopstvenog mišljenja. Aktivno angažovanje učenika u malim grupama i diskutovanje u velikim grupama, kao i rad na individualnim zadacima, stvaraju sredinu u kojoj učenici mogu da uvežbavaju i usavršavaju sve veće sposobnosti saopštavanja svojih razmišljanja o matematičkim postupcima i metodima. Male grupe učenika pružaju mnoštvo prilika za postavljanje pitanja, raspravljanje o pojedinim idejama, pravljenje grešaka, kao i za to da nauče da slušaju ideje drugih, da ih konstruktivno kritikuju i da u pismenom obliku rezimiraju svoja otkrića. Rasprava u velikoj grupi (u odeljenju) pruža učenikima priliku da objedine i procene sve ideje, da zabeleže i rezimiraju prikupljene podatke, razmene i uporede postupke rešavanja, postavbe hipoteze

i izvedu zaključke. Kao i drugi nastavni metodi, verbalizacija matematičkih pojmova i postupaka jeste deo procesa aktivnog rada na polju matematike, a ne svrha sama po sebi. Učenici kojima se na časovima matematike često pruža prilika da govore, pišu, čitaju i slušaju, koji se na to podstiču i u tome podržavaju, nauče da komuniciraju kako bi savladali matematiku i uče da komuniciraju na matematički način.

Još jedna značajna promena u programu koja odražava metakognitivan pristup nastavi matematike jeste način na koji se formulišu obrazovni ishodi u toj oblasti. Razmotrite ova četiri ishoda koja se pojavljuju u *Protokolu za zapadnu Kanadu i programu nastave u Alberti* (1996).

Obrazlaže izbor načina za sabiranje i oduzimanje, koristeći:

- postupke procene
- „pogodne“ postupke
- manipulativne postupke
- algoritme
- digitron.

(komunikacija, rešavanje problema, rasuđivanje, tehnologija)

Treći razred, str. 119

Opisuje uočenu zakonitost koristeći svakodnevni jezik u govornoj i pisanoj formi.
(komunikacija, povezivanje)

Peti razred, str. 168

Objašnjava, pokazuje i koristi proporcije u rešavanju problema.
(komunikacija, rešavanje problema, vizualizacija)

Sedmi razred, str. 222

Objašnjava na više načina zašto zbir uglova trougla iznosi 180 stepeni.
(komunikacija, rasuđivanje, tehnologija)

Sedmi razred, str. 232

Ova četiri ishoda pokazuju kakva su očekivanja u vezi sa znanjem učenika i sa onim što učenici mogu da urade, ali takođe ukazuju i na potrebu za dubljim razumevanjem gradiva o kojem je reč. Iz njih se vidi da se danas od učenika očekuje da pokažu svoje sposobnosti rasuđivanja, komunikacije i rešavanja problema koristeći čitav niz različitih postupaka.

Stvaranje uslova za razvoj matematičkog načina mišljenja

Način rada u školi i različita iskustva koja učenici stiču uz pomoć nastavnika utiču na njihovo razumevanje matematike, kao i na njihovu sklonost ka matematici i samopouzdanje. Nastavnici imaju presudnu ulogu u stvaranju uslova za metakognitivan način učenja. Svakako da ne postoji samo jedan „pravi način“ poučavanja. Međutim, da bi se metakognicija uspešno primenjivala na časovima matematike, potrebno je da nastavnici stalno razmišljaju o onome što rade, da se neprestano usavršavaju, kao i da u nastavi primenjuju delotvorne metode.

Dobri nastavnici matematike jesu oni s bogatim znanjem, koje obuhvata nekoliko različitih vrsta matematičkog znanja. Oni znaju i razumeju ključne matematičke pojmove i ideje, a matematiku kao disciplinu mogu da predstavljaju na celovit i povezan način; oni detaljno poznaju ciljeve nastavnih programa i znaju koje su najvažnije ideje za razred kojem predaju. Potrebno je da nastavnici razumeju različite načine predstavljanja glavnih matematičkih ideja, dobre i loše strane svakog od njih, kao i

njihovu povezanost. Trebalo bi da mogu da prepoznaju pojmove koji su učenicima teški za razumevanje, kao i da znaju kako se uobičajene greške u razumevanju mogu savladati. Jednako je važno i da imaju znanje o procesima mišljenja i postupcima pogodnim za učenje i primenu matematike i da mogu da ih povežu sa odgovarajućim nastavnim metodima.

Nastavnici su odgovorni za stvaranje uslova za učenje u kojima je matematičko razmišljanje norma. Osim sredine u kojoj se uči, a nju čine klupe, tabla, pano i materijal za rad, i atmosfera u učionici daje fine poruke u vezi s onim što se pri učenju matematike smatra važnim. Ključne komponente atmosfere u kojoj se odvija ozbiljno matematičko razmišljanje obuhvataju sledeće:

- stvarno poštovanje različitih ideja i različitih metoda rada
- uvažavanje rasuđivanja i smislenosti
- prihvatanje mišljenja da se na greškama uči.

U takvim uslovima svi učenici mogu naučiti da misle matematički.

Ponovno razmatranje prirode ocenjivanja

Nastavnici matematike obično ocenjuju znanje učenika na osnovu testova s višestrukim izborom ili testova u kojima treba dati kratke odgovore. Opšta je pretpostavka da tačni odgovori pokazuju znanje, a pogrešni nedostatak znanja i teškoće u učenju. Ali, kako učenje matematike postaje sve raznovrsnije i uključuje i naglasak na razmišljanju i sposobnosti iskazivanja mišljenja, nastavnici treba da koriste različite načine ocenjivanja. Na taj način moći će da donesu valjane zaključke u vezi s napredovanjem učenika.

Šta smo spremni da prihvatimo kao dokaz da učenici razumeju gradivo?

Očigledno je da samo neki načini ocenjivanja mogu da se primene kada je reč o metakognitivnim procesima u učenju matematike. Kao i u svim drugim predmetima, i u matematici različiti oblici ocenjivanja uspešnosti izvođenja određenih aktivnosti ili zadataka kroz koje se vidi kako učenici razmišljaju i kako organizuju svoj rad omogućuju da učenici na najbolji način pokažu šta znaju i mogu. Ocenjivanje izvođenja zadatka pomaže učenicima da shvate da matematika nije skup pravila koja treba upamtiti i zatim slediti, već proces koji omogućuje rešavanje problema. Ocenjivanje izvođenja ponekad podrazumeva izradu kratkih zadataka, kao što su rešavanje problema, kontrolni zadaci ili odgovaranje na pitanja koja traže opisni odgovor, dok se nekad ocenjuju učenički projekti ili istraživanja za čije je sprovođenje potrebno više vremena.

Ocenjivanje načina rada može se obaviti pomoću tabela za procenu. Nastavnici ih mogu sami napraviti, prilagoditi grupama učenika i pojedinim matematičkim zadacima, ili to mogu učiniti sa učenicima. Tabela za procenu i pokazatelji uspešnosti koji idu uz nju treba da usmere pažnju nastavnika i učenika na ciljeve rada, na ukupni učinak u vezi sa zadatkom (način rada, rezultat, provera, obrazloženje i dodatni zahtevi), kao i na sve ono što je potrebno da bi se postigao uspeh. Učenici treba da znaju šta to znači dobro raditi matematiku. Oni takođe treba da znaju šta je to rezultat koji zadovoljava, a šta izuzetan uspeh. Na stranama 48 i 49 dat je primer tabele za procenu *Razmišljam o svom radu*, namenjene učenicima u prvim razredima srednje škole. Takva tabela jednako je dobra za matematiku i za prirodne nauke (o kojima se govori u narednom poglavlju).

Samoocenjivanje učenika takođe podstiče metakogniciju, sticanje kontrole nad procesom učenja i samostalno mišljenje. Samoocenjivanje može imati različite vidove,

od popisa raznovrsnih načina rešavanja problema, lista za samoocenjivanje, spiskova stavova i upitnika do postavljanja odeljenskih ciljeva ili lista s rečenicama koje učenik treba da dovrši svojim rečima, na primer:

- Dovrši jednu rečenicu ili više njih.
 - Naučio sam...
 - Primetio sam da ja...
 - Otkrio sam...
 - Bilo mi je drago što sam...
- Metod _____ koji mi najviše odgovara jeste...
- Opiši mesto na kojem si se „zaglavio“ kada si radio na _____.
Šta ti je pomoglo da nastaviš s radom?
- Opiši ono što je najvažnije da se razume u vezi sa _____.

Sve u svemu, nastavnici mogu da podstaknu metakognitivno mišljenje u matematici. Oni sami treba da počnu da razmišljaju o matematici na drugačiji način – to razmišljanje treba da bude iznad pukih pojmova i postupaka – a treba i da promene očekivanja u odnosu na učenike i da ponovo razmotre načine na koje ih ocenjuju.

Razmišljam o svom radu – tabela za procenu (za matematiku i prirodne nauke)

Rešavanje problema		Učenik ✓	Nastavnik ✓	Prikazivanje ili saopštavanje urađenog	Učenik ✓	Nastavnik ✓
1	• Nisam shvatio šta treba da radim.			• Nisam znao šta da napišem, a ono što sam napisao nije baš jasno.		
	• Prikupio sam neke podatke, ali nisam znao kako da ih upotrebim.			• Nisam znao kako da objasnim ono što sam napisao.		
	• Nisam mogao da nađem odgovor / Nagađao sam odgovor.			• Matematički i naučni termini, tabele i grafikoni nemaju za mene smisla, pa ih ne upotrebljavam.		
2	• Bio sam zbunjen, ali mislim da sam shvatio kako treba da radim.			• Imao sam predstavu o tome šta želim da kažem, ali mi je bilo teško da to izrazim rečima.		
	• Nisam prikupio podatke / Prikupio sam podatke, ali nisam siguran da su to prave informacije.			• Nisam siguran da li ono što sam napisao ima nekog smisla.		
	• Mogao sam da odgovorim na pitanje, ali nisam mogao da objasnim odgovor, a nisam ni siguran da li je odgovor tačan.			• Teško mi je da koristim matematičke/naučne termine. Ne znam da li su moji grafikoni i tabele dobri.		
	• Došao sam do odgovora, ali nisam siguran na koji način.			• Mislim da nisam napisao dovoljno informacija, ali ne znam šta još da napišem.		

Rešavanje problema		Učenik ✓	Nastavnik ✓	Prikazivanje ili saopštavanje urađenog	Učenik ✓	Nastavnik ✓
3	• Bilo mi je prilično jasno šta treba da radim i kako to treba da radim.			• Uspeo sam da pružim uglavnom jasno i logično objašnjenje.		
	• Prikupio sam podatke potrebne za dolaženje do odgovora.			• Pokušao sam da odgovorim jasno i detaljno.		
	• Došao sam do odgovora i uspeo sam da ga objasnim prilično dobro, koristeći svoje rezultate.			• Mogu da koristim pojedine matematičke/naučne termine, kao i tabele i grafikone u objašnjenju.		
	• Plan mi je uspeo.					
4	• Znao sam tačno koje su mi informacije potrebne da bih rešio problem i kako da do njih dođem.			• Mogao sam da dam jasno i logično objašnjenje.		
	• Prikupio sam podatke koji su mi potrebni.			• Moj odgovor je detaljan i lako ga je pratiti.		
	• Došao sam do odgovora i mogao sam da dam potpuno objašnjenje koristeći svoje rezultate.			• Mogu da koristim matematičke/ /naučne termine, kao i tabele i grafikone u objašnjenju.		
	• Plan mi je uspeo. Drugi mogu da ga ponove i da dobiju iste rezultate.					